



Berippte Wärmeübertrager

# Näherungsgleichung zur k-Zahl-Berechnung

**KOMPAKT INFORMIEREN**

Mit einer Näherungsgleichung kann der Wärmedurchgangskoeffizient von berippten Wasser/Luft-Wärmeübertragern im Gegenstrom bei veränderten Betriebsbedingungen ohne die genaue Kenntnis der Wärmeübertrager-Geometrie mit geringem Aufwand ermittelt werden.

Dazu sollten beide Medienströme in beiden Betriebszuständen turbulent sein.

Ein besonderer Vorteil der Näherungsgleichung ist, dass die Geschwindigkeiten der Medien nicht bekannt sein müssen, da in die Gleichung nur die relative Änderung der Geschwindigkeiten einfließt.

Die Umrechnung des Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  von berippten, vielreihigen Wasser/Luft-Wärmeübertragern auf veränderte Rahmenbedingungen kann – neben dem im VDI-Wärmeatlas dokumentierten, aber sehr aufwendigen Verfahren – mit genügender Genauigkeit auch mit einer Näherungsgleichung erfolgen.



1 Berippter Wasser/Luft-Wärmeübertrager zur hocheffizienten Wärmerückgewinnung in einem RLT-Gerät.

➔ Berippte Wärmeübertrager werden als Erhitzer, Kühler oder als Wärmeübertrager in Kreislaufverbundsystemen zur Wärmerückgewinnung eingesetzt. Hierbei dienen auf der Luftseite berippte Rohre zur Wärmeübertragung, die im Kreuzstrom – also quer zur Luftströmung – angeordnet sind. Allerdings werden die einzelnen Rohre nacheinander im Gegenstrom zur Luft durchströmt, sodass bereits ab wenigen Durchgängen der Kreuz-Gegenstrom thermodynamisch dem reinen Gegenstrom sehr nahe kommt. Aus diesem Grund können ab einigen Rohrreihen (>4) praktisch die physikalischen Gegenstrombeziehungen verwendet werden<sup>1)</sup>.

Für den für eine Anwendung erforderlichen, auf den Luftstrom bezogenen thermodynamischen Temperaturänderungsgrad wird eine dimensionslose Kenngröße NTU (Number of Transfer Units) benötigt, die den Wärmeübertrager in seiner Charakteristik beschreibt. Aus dieser dimensionslosen Kennzahl NTU ergibt sich dann mit Bezug auf den Gegen-

strom der thermodynamische Temperaturänderungsgrad<sup>2)</sup> (Wirkungsgrad) des Wärmeübertragers 2.

Dieser Temperaturänderungsgrad wird durch eine Exponentialgleichung wie folgt beschrieben:

$$\phi_i = \frac{1 - e^{[(\mu_i - 1) \cdot NTU_i \cdot F]}}{1 - \mu_i \cdot e^{[(\mu_i - 1) \cdot NTU_i \cdot F]}} \quad \text{für } \mu <> 1$$

und

$$\phi_i = \frac{NTU_i \cdot F}{1 + NTU_i \cdot F} \quad \text{für } \mu = 1$$

- $\mu_i$  Wärmekapazitätenstromverhältnis der beiden Medien, beispielsweise  $\mu_1 = W_1 / W_2$
- NTU<sub>i</sub> Number of Transfer Units, bezogen auf die einzelnen Ströme i
- F Korrekturfaktor zum reinen Gegenstrom

1) Kaup, C., Steigerung der Wärmeübertragung an berippten Lamellenwärmeübertragern, HLH 10-2012, Seite 37 – 43

2) VDI-Wärmeatlas, Berechnungsblätter für den Wärmeübergang, 7. Auflage, Ca. 5f.



**Prof. Dr.-Ing. Christoph Kaup** ist Honorarprofessor an der Hochschule Trier, Umweltcampus Birkenfeld für Energieeffizienz und Wärmerückgewinnung; Geschäftsführender Gesellschafter der Howatherm Klimatechnik GmbH,

55767 Brücken, www.howatherm.de; Mitglied in verschiedenen Normungsgremien, beispielsweise EN 13 779, EN 13 053, EN 16 798 und EN 1886 sowie Richtlinienausschüssen, beispielsweise VDI 6022 und VDI 3803.

Die Abweichung des Kreuz-Gegenstroms zum thermodynamisch reinen Gegenstrom wird dabei mit dem Korrekturfaktor F beschrieben, der ab vier Durchgängen, also ab vier Rohrreihen n  $\geq 4$ , wie folgt berechnet wird:

$$F = \frac{n}{NTU_i \cdot \sqrt{\mu_i}} \cdot \frac{3 \cdot \sinh\left(\frac{NTU_i}{n} \cdot \sqrt{\mu_i}\right)}{1 + 2 \cdot \cosh\left(\frac{NTU_i}{n} \cdot \sqrt{\mu_i}\right)}$$

Sind beide Wärmekapazitätenströme gleich groß, also  $\dot{W}_1 = \dot{W}_2$  und damit  $\mu = 1$ , wie dies beispielsweise bei einer Wärmerückgewinnung bei ausgeglichenen Massenströmen der Fall ist, vereinfacht sich die Gegenstrombeziehung mit  $F \approx 1$  zu:

$$\phi_i = \frac{NTU_i}{1 + NTU_i}$$

Die dimensionslose Kennzahl NTU errechnet sich dabei aus der Beziehung:

$$NTU_i = k \cdot \frac{A}{\dot{W}_i}$$

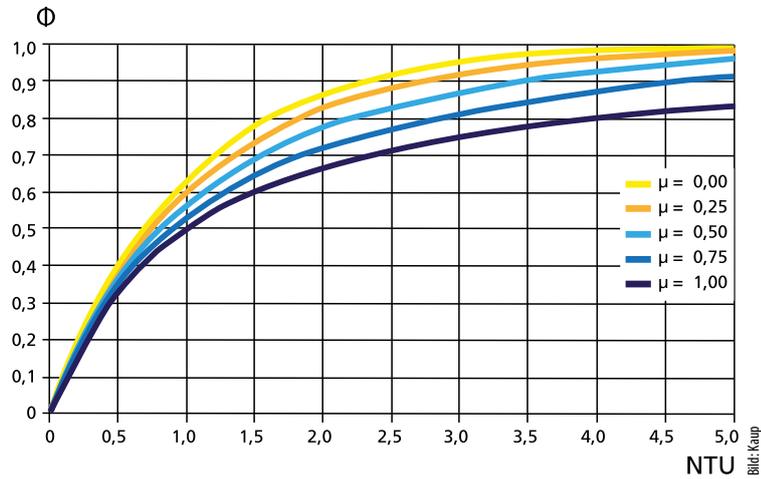
- k Wärmedurchgangskoeffizient in  $W/(m^2 K)$
- A Wärmeübertragende Fläche in  $m^2$
- $\dot{W}_i$  Wärmekapazitätsstrom in  $W/K$  des betreffenden Mediums
- $\dot{W}_i = \dot{m}_i \cdot c_p$
- $\dot{m}_i$  Massenstrom des Mediums in  $kg/s$
- $c_p$  spezifische Wärmekapazität in  $kJ/(kg K)$

Die dimensionslose Kennzahl NTU beschreibt also das Produkt aus der Güte der Wärmeübertragung, dem Wärmedurchgangskoeffizienten k und der wärmeübertragenden Fläche A bezogen auf den Wärmekapazitätsstrom  $\dot{W}$  des betrachteten Mediums. Der Wärmedurchgangskoeffizient k ist der reziproke Wert des Wärmewiderstandes R, der sich errechnet mit:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_a} + \frac{A}{A_0} \left( \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_i} \right)}$$

- $\alpha_i$  Wärmeübergangskoeffizient innen (z. B. Wasser) in  $W/(m^2 K)$
- d Dicke des wärmeleitenden Materials (z. B. des Rohres) in m
- $\lambda$  Wärmeleitkoeffizient in  $W/(m K)$
- $\alpha_a$  Wärmeübergangskoeffizient außen (z. B. Luft) in  $W/(m^2 K)$

Da beispielsweise bei einem Wasser/Luft-Wärmeübertrager der Wärmeübergangskoeffizient auf der Wasserseite in einer Größenordnung von ca. 2000 bis 5000  $W/(m^2 K)$  liegt und gleichzeitig die Wärmeleitung im Rohr oder der Lamelle im Vergleich zu den Medienseiten vernachlässigbar klein ist, wird schnell deutlich, dass der Wärmeübergangskoeffizient auf der Luftseite meist der limitierende Faktor der Wärmeübertragung ist. Üblicherweise liegen Wärmeübergangskoeffizienten auf der Luft-



**2 Temperaturänderungsgrade im Gegenstrom** bezogen auf die dimensionslose Wärmeübertrager-Kenngröße NTU.

seite je nach Rohranordnung und Lamellengeometrie bei ca. 20 bis 40  $W/(m^2 K)$  und damit um rund zwei Zehnerpotenzen niedriger als auf der Wasserseite.

Die Wärmeübertragung durch eine erzwungene Strömung ergibt sich aus folgender Beziehung:

$$\alpha = \frac{\dot{q}}{\vartheta_M - \vartheta_W} = \frac{Nu \cdot \lambda}{l}$$

- $\dot{q}$  Wärmestrom in  $W/s$
- Nu dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient, Nusseltzahl  $Nu = f(Pr, Re)$
- $\lambda$  Wärmeleitkoeffizient des strömenden Mediums in  $W/(m K)$
- l charakteristische Länge der Lamelle in m
- $\vartheta$  Temperatur des Mediums (M) abzüglich der Wand-Temperatur (W) (z. B. Lamelle)

für turbulente Strömung mit  $10^3 < Re < 10^5$  und  $5 < A/A_0 < 30$

Pr Prandtl-Zahl (stoffabhängige Größe des Mediums, z. B. Luft)

$$Pr = \rho \cdot \nu \cdot \frac{c_p}{\lambda}$$

- $\rho$  Luftdichte in  $kg/m^3$
- $\nu$  kinematische Viskosität in  $m^2/s$
- $c_p$  spezifische Wärmekapazität in  $kJ/(kg K)$
- $\lambda$  Wärmeleitfähigkeit in  $W/m/K$
- Re Reynold-Zahl (strömungsabhängige Größe)

$$Re = \frac{w \cdot l}{\nu}$$

- w Strömungsgeschwindigkeit im engsten Querschnitt in  $m/s$
- l charakteristische Länge der Lamelle in m

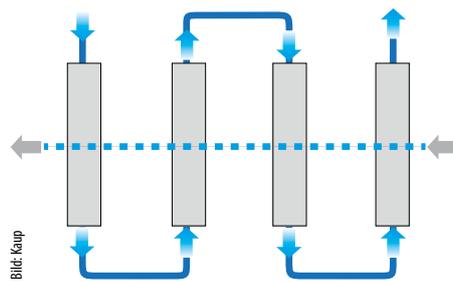
$$l = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{(d^2 + h^2)}$$

$A/A_0$  Oberflächenverhältnis äußere Fläche A zur Rohrfläche  $A_0$

$$\frac{A}{A_0} = 1 + \frac{2 \cdot h \cdot (h + d + s)}{t_r \cdot d}$$

- h charakteristische Lamellenhöhe
- $h = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{4 \cdot s_1 \cdot s_2}{2 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2} - d \right)$
- $s_1$  Achsabstand der Rohre in Luftrichtung in m
- $s_2$  Achsabstand der Rohre quer zur Luftrichtung in m
- d Rohrdurchmesser in m
- s Materialdicke der Lamelle in m
- $t_r$  Lamellenteilung in m

**3 Kreuzgegenstromanordnung mit vier Durchgängen (Rohrreihen).**



**Wärmeübertragung auf der Luftseite**

Die dimensionslose Nusseltzahl Nu errechnet sich an der berippten Oberfläche (Lamelle) eines Wärmeübertragers mit versetzter Rohranordnung  $\textcircled{4}$  ab vier Rohrreihen auf der Luftseite  $\textcircled{3}$  aus:

$$Nu = 0,38 \cdot Re^{0,6} \cdot \left( \frac{A}{A_0} \right)^{-0,15} \cdot Pr^{1/3}$$

**Wärmeübertragung im Rohr**

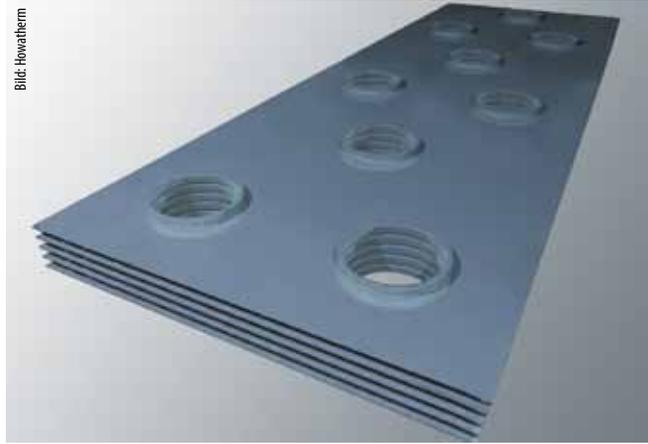
Die dimensionslose Nusseltzahl Nu errechnet sich hier innerhalb der Rohre  $\textcircled{4}$  (Medienseite) aus:

$$Nu_{turb} = \frac{\frac{\zeta}{8} \cdot (Re - 1000) \cdot Pr}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\frac{\zeta}{8}} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} \cdot \left( 1 + \left( \frac{d}{l} \right)^{2/3} \right)$$

für turbulente Strömung mit  $2300 < Re < 10^5$  und  $0,6 < Pr < 2000$

3) VDI-Wärmeatlas, Berechnungsblätter für den Wärmeübergang, 7. Auflage, Mb 3

4) VDI-Wärmeatlas, Berechnungsblätter für den Wärmeübergang, 7. Auflage, Gb 7



4 Konventionelle Lamellen eines berippten Wärmeübertragers mit sechs Rohrreihen in versetzter Rohr-anordnung mit Ansicht auf die Eintrittskante.

$\zeta$  Widerstandsbeiwert des Rohres

$$\zeta = (1,82 \cdot \log(\text{Re}) - 1,64)^{-2}$$

$$\text{Re} = \frac{w \cdot d_i}{\nu}$$

$d_i$  Innendurchmesser des Rohres in m

$l$  Rohrlänge in m

Aus der dimensionslosen Nusseltzahl  $Nu$  ergibt sich der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  mit:

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{d}$$

### Näherungsgleichung

Das zuvor beschriebene Verfahren ist relativ komplex und aufwendig. Insbesondere bei veränderten Bedingungen, also bei veränderten Luft- oder Medienmengen, müssen für sämtliche Zustände die Wärmedurchgangskoeffizienten berechnet werden. Häufig wird in der Praxis vereinfacht mit einer konstanten k-Zahl gerechnet, was jedoch zu erheblichen Fehlern führt.

Aus diesem Grunde bietet sich ein Näherungsverfahren an, mit dem der Wärmedurchgangskoeffizient  $k$  leicht auf unterschiedliche Betriebsbedingungen umgerechnet werden kann. Dazu wird die ursprüngliche k-Zahl, die sich aus der Auslegung oder Messung ergibt, aufgrund der sich ändernden Luft- und Mediensgeschwindigkeiten mit folgender Gleichung nach Kaup korrigiert:

$$k_{\text{korr}} = k_{\text{org}} \cdot \left( \frac{w_{L,\text{korr}}}{w_{L,\text{org}}} \right)^{0,4} \cdot \left( \frac{w_{M,\text{korr}}}{w_{M,\text{org}}} \right)^{0,4}$$

$k_{\text{korr}}$  umzurechnende k-Zahl in  $W/(m^2 K)$

$k_{\text{org}}$  ursprüngliche k-Zahl gemessen oder berechnet in  $W/(m^2 K)$

$w_{L,\text{korr}}$  Luftgeschwindigkeit im umzurechnenden Betriebszustand in m/s

$w_{L,\text{org}}$  ursprüngliche Luftgeschwindigkeit in m/s

$w_{M,\text{korr}}$  Mediensgeschwindigkeit im umzurechnenden Betriebszustand in m/s

$w_{M,\text{org}}$  ursprüngliche Mediensgeschwindigkeit im Rohr in m/s

Aufgrund umfangreicher Vergleichsberechnungen und Vergleichsmessungen kann die Gleichung im Bereich von  $1,6 < (w_{L,\text{korr}} / w_{L,\text{org}}) < 0,4$  und  $1,4 < (w_{M,\text{korr}} / w_{M,\text{org}}) < 0,8$  verwendet werden. Sie leitet sich von der Näherungsgleichung nach Kaup<sup>5)</sup> zur Umrechnung von Temperaturänderungsgraden von Wärmerückgewinnungssystemen ab.

5) Recknagel-Sprenger, Taschenbuch für Heizung + Klimatechnik 77. Ausgabe 2015/16, Kapitel -3.3.2-5.5.3, Seite 1525

### 5 Vergleich der Umrechnung von k-Zahlen

	$w_L$	$w_M$	$k_{VDI}$	$k_{\text{Näherung}}$	Fehler	$\frac{w_M}{w_{M,\text{org}}}$	$\frac{w_L}{w_{L,\text{org}}}$	$Re_L$	$Re_M$
	m/s	m/s	$W/(m^2 K)$	$W/(m^2 K)$	%	–	–	–	–
	3,33	1,39	32,23	32,49	-0,81	1,30	1,60	12 624	5087
	2,91	1,28	29,69	29,83	-0,49	1,20	1,40	11 046	4696
	2,50	1,17	27,03	27,09	-0,21	1,10	1,20	9468	4305
Basis	2,08	1,07	24,24					7890	3913
	1,66	0,96	21,27	21,26	0,08	0,90	0,80	6312	3522
	1,25	0,85	18,06	18,07	-0,06	0,80	0,60	4734	3131
	0,83	0,75	14,48	14,57	-0,64	0,70	0,40	3156	2739

Bild: Kaup

### 6 Vergleich der Umrechnung von k-Zahlen

bei konstanter Mediensgeschwindigkeit im Rohr.

	$w_L$	$w_M$	$k_{VDI}$	$k_{\text{Näherung}}$	Fehler	$\frac{w_M}{w_{M,\text{org}}}$	$\frac{w_L}{w_{L,\text{org}}}$	$Re_L$	$Re_M$
	m/s	m/s	$W/(m^2 K)$	$W/(m^2 K)$	%	–	–	–	–
	3,33	1,00	28,06	28,49	-1,55	1,00	1,60	12 624	3667
	2,91	1,00	26,77	27,01	-0,91	1,00	1,40	11 046	3667
	2,50	1,00	25,30	25,40	-0,37	1,00	1,20	9468	3667
Basis	2,08	1,00	23,61					7890	3667
	1,66	1,00	21,61	21,60	0,08	1,00	0,80	6312	3667
	1,25	1,00	19,17	19,25	-0,39	1,00	0,60	4734	3667
	0,83	1,00	16,03	16,37	-2,09	1,00	0,40	3156	3667

Bild: Kaup

### 7 Vergleich der Umrechnung von k-Zahlen

bei konstanter Luftgeschwindigkeit.

	$w_L$	$w_M$	$k_{VDI}$	$k_{\text{Näherung}}$	Fehler	$\frac{w_M}{w_{M,\text{org}}}$	$\frac{w_L}{w_{L,\text{org}}}$	$Re_L$	$Re_M$
	m/s	m/s	$W/(m^2 K)$	$W/(m^2 K)$	%	–	–	–	–
	2,08	1,60	27,55	28,49	-3,43	1,30	1,00	7890	5867
	2,08	1,40	26,57	27,01	-1,69	1,20	1,00	7890	5133
	2,08	1,20	25,30	25,40	-0,38	1,10	1,00	7890	4400
Basis	2,08	1,00	23,61					7890	3667
	2,08	0,80	21,21	21,60	-1,83	0,90	1,00	7890	2933
	2,08	0,70	19,56	20,39	-4,24	0,80	1,00	7890	2567
	2,08	0,60	17,45	19,25	-10,28	0,70	1,00	7890	2200

Bild: Kaup

## Vergleichsrechnung

Im Vergleich zu den Berechnungsalgorithmen im VDI-Wärmeatlas wird die Näherungsgleichung im Folgenden überprüft. Dazu wurde ein Kreislaufverbundsystem als gekoppelter Wärmeübertrager im Wirkungsgradoptimum ausgelegt. Im Zwischenkreis wurde der Wärmeübergang mit einer Sole (25 % Ethylenglykol, 75 % Wasser) berechnet. Es wurden folgende Geometrien berücksichtigt:

- $s_1 = 37,5$  mm und  $s_2 = 45$  mm
- $t_r = 2,5$  mm mit  $s = 0,25$  mm
- $d = 12$  mm mit  $n > 4$

⑤ stellt die Ergebnisse der detaillierten Berechnung nach VDI-Wärmeatlas im Vergleich zu den Ergebnissen der Näherungsgleichung dar. Man erkennt, dass die Abweichung im Vergleich zur Umrechnung nach VDI-Wärmeatlas sehr gering ist und unter 1 % liegt. Unter Berücksichtigung einer konstanten Mediengeschwindigkeit im Rohr ergibt sich der Vergleich aus ⑥. Unter Berücksichtigung einer konstanten Luftgeschwindigkeit ergibt sich der Vergleich aus ⑦.

⑥ und ⑦ zeigen, dass die Mediengeschwindigkeit innerhalb des Rohres einen größeren Fehler verursacht als die Änderungen auf der Luftseite des Wärmeübertragers. Insbesondere bei sehr geringen Mediengeschwindigkeiten hin zur laminaren Strömung vergrößert sich der Fehler maßgeblich. Dies ist vor allem aus der letzten Zeile in ⑦ ersichtlich. Bei laminarer Strömung im Rohr ( $Re < 2300$ ) vergrößert sich die Abweichung auf  $-10,28$  %. Aus diesem Grund muss die Gültigkeit der Näherungsformel auf der Medien-seite eingeschränkt werden, wenn die Abweichung in engen Grenzen gehalten werden soll.

## Fazit

Die Tabellenwerte in der Spalte  $k_{VDI}$  zeigen, dass für eine Berechnung des Wirkungsgrads berippter Wasser/Luft-Wärmeübertrager schon bei leicht veränderten Betriebsbedingungen eine Neuberechnung des Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  erforderlich ist.

Mit der dargestellten Näherungsgleichung kann der Wärmedurchgangskoeffizient  $k$  von

berippten Wasser/Luft-Wärmeübertragern mit geringem Aufwand und genügender Genauigkeit auf veränderte Betriebsbedingungen umgerechnet werden. Die Abweichungen liegen innerhalb der Gültigkeitsgrenzen im Bereich von etwa  $\pm 3$  % und damit auf einem erstaunlich geringen Niveau.

Der große Vorteil des beschriebenen Verfahrens besteht darin, dass die absoluten Geschwindigkeiten der Medien nicht zwingend bekannt sein müssen, um die Änderung der  $k$ -Zahl berechnen zu können. Es ist ausreichend, die relative Änderung der Geschwindigkeiten in die Näherungsgleichung einzusetzen. Somit kann ohne die detaillierte Kenntnis der Geometrien des Wärmeübertragers die Änderung der  $k$ -Zahl mit hoher Genauigkeit abgeschätzt werden. Es sollte aber darauf geachtet werden, dass die beiden Medienströme turbulent sind, da sonst eine höhere Abweichung zu dem tatsächlichen Wärmedurchgangskoeffizienten entstehen kann. ●

**HOWA WÜ-Rechner** by HOWATHERM

## App zur Umrechnung von Wärmeübertragern bei veränderten Betriebsbedingungen Neues Tool: Wärmeübertrager-Rechner by HOWATHERM

Die Ingenieure von HOWATHERM haben ein neues praktisches Tool entwickelt, den

**Wärmeübertrager-Rechner**  
by HOWATHERM.

Das Tool hilft Ihnen auf Basis der Auslegungsdaten von Gegenstrom-Wärmeübertragern (WÜ), bei veränderten Betriebsbedingungen die sich ergebenden Zustände abzuschätzen.

Sie sehen sofort, was der WÜ in der Praxis tatsächlich leisten kann.

Damit haben Sie ein Tool zur Hand, das Ihnen schnell und komfortabel als App anzeigt, welche Werte mit dem Wärmeübertrager bei veränderten Rahmenbedingungen, zum Beispiel bei Temperaturänderung, erreicht werden können.

### Und so gehts:

Zuerst geben Sie die bekannten Werte der Auslegung in die Maske auf dem Bildschirm ein und danach die Werte der



geänderten Mengen und/oder Temperaturen. Dabei können Sie zwischen der Berechnung im Wasser- oder Solebetrieb wählen. Das Tool errechnet dann mit einer Unsicherheit von  $\pm 4$  % nach den Gegenstrombeziehungen die Austrittswerte und die Leistungen und stellt sie als Tabelle und grafisch dar.

Es steht unter [www.howatherm.de](http://www.howatherm.de) zum Berechnen und zum Download bereit.

